PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2015/2016

PROVA DI MATEMATICA

Motivare opportunamente ogni risposta.

ESERCIZIO 1.

Una funzione reale f si dice convessa quando, per ogni $\lambda \in [0,1]$ e ogni x_1 e x_2 nel suo dominio, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. Una funzione reale f si dice quasi-convessa quando, per ogni x_1 e x_2 nel suo dominio, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq Max\{f(x_1), f(x_2)\}$

a) Disegnare una funzione convessa ed una non convessa.
b) Disegnare una funzione quasi-convessa ed una non quasi-convessa.
c) Dimostrare che una funzione convessa è anche quasi-convessa.
d) Disegnare una funzione quasi-convessa ma non convessa.

ESERCIZIO 2.

Mario e Anna giocano con un dado a sei facce. Si accorgono che la faccia con il numero 1 esce con più frequenza delle altre cinque (queste ultime risultano invece equiprobabili). Decidono quindi che quando esce la faccia con il numero 1 tale tiro non sia valido e si debba effettuare un nuovo lancio. Supponendo che i due giocatori continuino a giocare fino ad ottenere due lanci validi consecutivi si calcoli:

a) la probabilità che la somma dei valori degli ultimi due lanci sia 8;
b) la probabilità che il valore assoluto della differenza tra i valori degli ultimi due lanci sia uguale alla loro media aritmetica.

ESERCIZIO 3.

Sia x_t il valore in euro di un investimento al periodo *t*. In ogni periodo il valore diminuito di 50 euro è pari alla metà del valore del periodo precedente.

a) Scrivere l'equazione che esprime il valore investito in *t* in funzione del valore investito in *t*-1. Ipotizzando che il valore iniziale x_0 sia pari a 20 euro, si trovi il valore dell'investimento al periodo *t*=3.
b) Scrivere l'equazione che esprime il valore investito in *t* in funzione del valore iniziale x_0.
c) Calcolare il valore dell'investimento per *t* che tende all'infinito. (può essere utile sapere che per $x \in (0,1)$ la somma infinita $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ha valore $1/(1-x)$)
d) Quanto si deve investire in $t = 0$ affinché la somma iniziale rimanga invariata nel tempo?

ESERCIZIO 4

a) Data una circonferenza si dimostri che l'angolo al centro è doppio di un generico angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco.
b) Dato per noto il teorema di cui al punto *a*), si dimostri che gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono tutti uguali.
c) Quanto vale l'angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza?

PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2014/2015

PROVA DI MATEMATICA

Risolvere, motivando le risposte, i seguenti esercizi.

ESERCIZIO 1.

Secondo i termini di un contratto, il signor XYX avrebbe dovuto pagare una somma di quasi 1 milione di euro. Dopo essersi procurato i servigi di un abile falsario, il signor XYX fece cancellare la cifra all'estrema sinistra del numero (cioè la prima cifra), facendola riportare all'estrema destra. Dopo questa modifica il debito diventa 1/4 dell'originario. A quanto ammontava il debito prima di tale manipolazione?

ESERCIZIO 2.

Tre scatole *A, B e C* contengono lampade prodotte da una certa fabbrica. Alcune di esse risultano difettose. *A* contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, *B* ne contiene 500 con il 20% difettose e *C* ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada**.** Qual è la probabilità che essa sia difettosa? E se invece le scatole fossero state solo due, una coincidente con *A* ed una contenente tutte le lampadine di *B* e *C*?

ESERCIZIO 3.

Un'impresa produce due tipi di beni *A* e *B* i cui prezzi di vendita sono rispettivamente di 150 euro e 180 euro per ogni unità. Per produrre un'unità di bene *A* sono richiesti 15 minuti di utilizzo della macchina *X*, 35 minuti di utilizzo della macchina *Y* e 30 minuti di lavoro-uomo. Per il bene *B* sono invece richiesti 55 minuti di utilizzo della macchina *X*, 45 minuti di utilizzo della macchina *Y* e 50 minuti di lavoro-uomo. La giornata lavorativa dell'unico operaio presente in azienda, ed il tempo per cui può rimanere attiva ciascuna delle 2 macchine *X* e *Y* è di 8 ore. Dati i vincoli del problema, determinare le quantità dei beni *A* e *B* (non necessariamente intere) che bisogna produrre al giorno per massimizzare il profitto.

ESERCIZIO 4.

Sia dato nel piano un esagono regolare. Per ogni punto *P* del piano, chiamiamo *l(P)* la somma delle sei distanze tra *P* e le rette su cui giacciono i lati dell'esagono, e *v(P)* la somma delle sei distanze di *P* dai vertici dell'esagono.

1. Per quali punti *P* del piano *l(P)* è minima?
2. Per quali punti *P* del piano *v(P)* è minima?

PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2013/2014

PROVA DI MATEMATICA

Risolvere, motivando le risposte, i seguenti esercizi.

ESERCIZIO 1.

Si rappresenti nel piano cartesiano l'insieme D delle coppie di numeri reali per le quali ha significato l'espressione $ln(16-(x-1)^2-(y-2)^2\ )+\sqrt{y^2-x^2}/\sqrt{|x+y|+x^2}$

Elencare i punti appartenenti a D con coordinate numeri interi non negativi.

ESERCIZIO 2.

Supponiamo che un produttore fabbrichi due tipi di barche: canoa e barca a remi. Le barche sono modellate da alluminio per mezzo di una macchina pressante di grandi dimensioni e sono rifinite con il lavoro a mano. Una barca a remi richiede 5 kg in alluminio, 6 min. di tempo macchina e 2 ore di finitura del lavoro; una canoa richiede 6 kg in alluminio, 5 min. di tempo macchina e 5 ore di finitura del lavoro. Per i prossimi tre mesi la società può impegnarsi per la fabbricazione di tali imbarcazioni, fino a mezza tonnellata di alluminio, 5 ore di tempo macchina e 200 ore di lavoro. L'azienda realizza un profitto di euro 50 sulla vendita di una barca a remi e un profitto di euro 60 sulla vendita di una canoa. Assumendo che ogni barca prodotta venga venduta, quante barche di ogni tipo devono essere fabbricate nei prossimi 3 mesi, al fine di massimizzare i profitti?

ESERCIZIO 3.

Matilde vuole regalare una margherita di cartone alla sua mamma. Ritaglia un cerchio giallo e lo mette al centro. Poi ritaglia alcuni cerchi bianchi, dello stesso raggio del cerchio giallo, per fare i petali. Dispone i petali nel modo seguente: il primo tangente esternamente al cerchio giallo, il secondo tangente esternamente al cerchio giallo e al primo petalo, e così via fino a completare il giro con l'ultimo petalo che è tangente al penultimo, al primo petalo e al cerchio giallo. Quanti petali ha la margherita?

ESERCIZIO 4.

Una lotteria non è altro che una serie di possibili pagamenti $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mutuamente esclusivi che si ottengono con certe probabilità $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ dove $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Il valore atteso della lotteria si ottiene moltiplicando i pagamenti per la loro probabilità , cioè:

$$\text{valore atteso} = x_1\,p_1 + x_2\,p_2 + \dots + x_n\,p_n$$

Oggi all'ippodromo corre Bianco contro Nero. I bookmakers quotano Bianco a 1.5 e Nero a 2. Questo significa che per ogni euro scommesso su Bianco ne vinco 1.5 se vince Bianco e nulla altrimenti e per ogni euro scommesso su Nero ne vinco 2 se vince Nero e nulla altrimenti. Si calcoli la probabilità che, secondo i bookmakers, Bianco ha di vincere la gara, assumendo che il valore atteso di un euro scommesso su Bianco sia uguale al valore atteso di un euro scommesso su Nero. Sotto la stessa ipotesi, se scommetto parte del mio capitale su Bianco e parte su Nero, il valore atteso della vincita è superiore o inferiore al capitale scommesso?

PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2012/2013

PROVA DI MATEMATICA

ESERCIZIO 1.

Data una circonferenza di raggio 1 ed un quadrilatero rettangolo in essa inscritta si indichi con A l'area del quadrilatero e con P il suo perimetro. Determinare i quadrilateri il cui valore di P è massimo ed i quadrilateri il cui valore di $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - \frac{A}{2}$ è minimo.

ESERCIZIO 2.

In un aula d'esame sono seduti 10 studenti. Sotto l'ipotesi che ogni studente abbia la stessa probabilità di nascere in uno dei 12 mesi dell'anno, determinare la probabilità che tutti siano nati in un mese diverso e la probabilità che almeno due di essi siano nati nello stesso mese dell'anno.

ESERCIZIO 3.

Si rappresenti nel piano cartesiano la regione definita dalla seguente disuguaglianza:

$$y^4 - 5y^2 + 6 \leq x^2\,(2 - y^2)$$

Si determini quale è la probabilità che lanciando una coppia di dadi a 6 facce si trovi una coppia di numeri che appartenga a tale regione.

ESERCIZIO 4.

In un mercato si possono acquistare e vendere in qualsiasi quantità, 3 titoli così costruiti:

- il Titolo A prevede, a seguito di un'uscita al periodo 0 di 100 euro, un'entrata al periodo 1 di 120 euro;
- il Titolo B prevede, a seguito di un'uscita al periodo 0 di 100 euro, un'entrata al periodo 2 di 140 euro;
- il Titolo C prevede, a seguito di un'uscita al periodo 1 di 100 euro, un'entrata al periodo 2 di 120 euro.

Per esempio acquistando mezza unità del Titolo A si incassano 60 euro al periodo 1 e si pagano 50 al periodo 0 mentre vendendo una unità del titolo C si incassano 100 euro al periodo 1 e si pagano 120 euro al periodo 2. Si determini se è possibile costruire una strategia di acquisti e vendite che consenta di avere flussi di cassa non negativi in ogni periodo. In caso affermativo si costruisca la strategia di acquisti e vendite che comporta un incasso di 100 euro nel periodo 0 e nessun esborso/incasso negli altri periodi.

PROVA AMMISSIONE ANNO ACCADEMICO 2011/2012

PROVA DI MATEMATICA

ESERCIZIO 1

Un titolo ha un prezzo iniziale di 100 euro. Ogni periodo il prezzo può triplicare o dimezzarsi con probabilità rispettivamente di 2/3 e 1/3. II valore atteso del prezzo del titolo dopo n periodi è la media dei prezzi possibili pesati con le loro probabilità. Trovare i possibili prezzi del titolo ed il suo valore atteso dopo 3 periodi.

ESERCIZIO 2

a) Tracciare sul piano cartesiano il luogo dei punti (x, y) in cui $xy = k$ per $k = -1, 0, 1, 3$.
b) Determinare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x, y) = xy$ nella regione del piano cartesiano $S = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 4\}$

ESERCIZIO 3

Un insieme X del piano cartesiano si definisce convesso se per ogni coppia di punti (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q) in X e per ogni $\lambda \in [0,1]$ il punto di coordinate

$$(\lambda x_P + (1-\lambda)x_Q, \lambda y_P + (1-\lambda) y_Q)$$

appartiene a X. a) Dimostrare che il semipiano $\pi = \{x + y - 1 \leq 0\}$ verifica la definizione di insieme convesso. b) Dimostrare che il quadrato A di vertici (0,0), (1,0), (1,1), (0,1) verifica la definizione di insieme convesso.
c) L'insieme $\pi \cup A$ è convesso? Giustificare opportunamente la risposta.

ESERCIZIO 4

In un mercato si possono acquistare e vendere, in qualsiasi quantità, 3 titoli così costruiti:

- il Titolo A prevede, a seguito di un esborso al periodo 0 di 90 euro, un'entrata al periodo 1 di 100 euro;
- il Titolo B prevede, a seguito di un esborso al periodo 0 di 110 euro, un'entrata al periodo 2 di 120 euro;
- il Titolo C prevede, a seguito di un esborso al periodo 1 di 100 euro, un'entrata al periodo 2 di 110 euro.

Per esempio vendendo 2 unità del titolo C si incassano 200 euro al periodo 1 e si pagano 220 euro al periodo 2, mentre comprando una unità del titolo A e vendendo una unità del titolo B si incassano 20 euro al periodo 0 e 100 euro al periodo 1 ma si esborsano 120 euro al periodo 2. Costruire una strategia di acquisti e vendite che consenta di avere flussi di cassa (incassi meno esborsi) non negativi in ogni periodo.